

## CAPÍTULO 6

# FÓRMULAS DEL PRODUCTO Y DEL COCIENTE

---

## 6.1 FÓRMULA DEL PRODUCTO

$$(7) \quad \frac{d}{dx} uv = u \frac{d}{dx} v + v \frac{d}{dx} u \quad \text{fórmula del producto}$$

en donde  $u$  representa a uno de los factores y  $v$  representa al otro factor (no constantes).

**Ejemplo 1:** Hallar la derivada de  $y = (x^2 + 5x - 11)(x^3 - 7x^2 - 9)$

**Solución:** Empleando la fórmula (7) del producto, en donde  $u$  representa el primer factor y  $v$  representa el segundo factor, o sea

$$\begin{aligned} u &= x^2 + 5x - 11 \\ v &= x^3 - 7x^2 - 9 \end{aligned}$$

entonces con dicha fórmula:

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{d}{dx} v + v \frac{d}{dx} u$$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{(x^2 + 5x - 11)}_u \underbrace{\frac{d}{dx}(x^3 - 7x^2 - 9)}_{\frac{d}{dx}v} + \underbrace{(x^3 - 7x^2 - 9)}_v \underbrace{\frac{d}{dx}(x^2 + 5x - 11)}_{\frac{d}{dx}u}$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 5x - 11)(3x^2 - 14x) + (x^3 - 7x^2 - 9)(2x + 5)$$

**Ejemplo 2:** Calcular la derivada de  $y = (x^2 - 5x - 9)\sqrt{5x + 4}$

**Solución:** En este caso los dos factores son

$$u = x^2 - 5x - 9$$

$$v = \sqrt{5x + 4}$$

empleando la fórmula (7), página 67, del producto, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{(x^2 - 5x - 9)}_u \underbrace{\frac{d}{dx}\sqrt{5x + 4}}_{\frac{d}{dx}v} + \underbrace{\sqrt{5x + 4}}_v \underbrace{\frac{d}{dx}(x^2 - 5x - 9)}_{\frac{d}{dx}u}$$

para derivar  $\sqrt{5x + 4}$  debe emplearse la fórmula de la raíz cuadrada:

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 - 5x - 9) \left[ \frac{5}{2\sqrt{5x + 4}} \right] + \sqrt{5x + 4} (2x - 5)$$

ordenando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5(x^2 - 5x - 9)}{2\sqrt{5x+4}} + (2x-5)\sqrt{5x+4}$$

**Ejemplo 3:** Hallar la derivada de  $y = (7x^2 - 3)^8 (9 - 3x)^5$

**Solución:** En este caso los dos factores son

$$u = (7x^2 - 3)^8$$

$$v = (9 - 3x)^5$$

Empleando la fórmula (7), página 67, del producto, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{(7x^2 - 3)^8}_u \underbrace{\frac{d}{dx}(9 - 3x)^5}_{\frac{d}{dx}v} + \underbrace{(9 - 3x)^5}_v \underbrace{\frac{d}{dx}(7x^2 - 3)^8}_{\frac{d}{dx}u}$$

para calcular las derivadas de  $(9 - 3x)^5$  y de  $(7x^2 - 3)^8$  debe emplearse en ambas la fórmula (6) de  $u^n$  de la potencia:

$$\frac{dy}{dx} = (7x^2 - 3)^8 \left[ 5(9 - 3x)^4 \frac{d}{dx}(9 - 3x) \right] + (9 - 3x)^5 \left[ 8(7x^2 - 3)^7 \frac{d}{dx}(7x^2 - 3) \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = (7x^2 - 3)^8 \left[ 5(9 - 3x)^4 (-3) \right] + (9 - 3x)^5 \left[ 8(7x^2 - 3)^7 (14x) \right]$$

y haciendo las multiplicaciones indicadas

$$\frac{dy}{dx} = -15(7x^2 - 3)^8 (9 - 3x)^4 + 112x(9 - 3x)^5 (7x^2 - 3)^7$$

## 6.2 FÓRMULA DEL COCIENTE

$$(8) \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{d}{dx} u - u \frac{d}{dx} v}{v^2} \quad \text{fórmula del cociente}$$

en donde  $u$  representa al numerador y  $v$  representa al denominador, siempre y cuando no sean constantes.

**Ejemplo 4:** Hallar la derivada de  $y = \frac{6x+7}{8x-9}$

**Solución:** Cuando la función a derivar es una fracción, debe emplearse la fórmula (8) del cociente, en donde  $u$  simboliza el numerador y  $v$  simboliza el denominador. En este caso:

$$u = 6x + 7$$

$$v = 8x - 9$$

recordando la fórmula (8) del cociente y sustituyendo después:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{u}{v} \right) &= \frac{v \frac{d}{dx} u - u \frac{d}{dx} v}{v^2} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{(8x-9) \frac{d}{dx} (6x+7) - (6x+7) \frac{d}{dx} (8x-9)}{(8x-9)^2} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{(8x-9)(6) - (6x+7)(8)}{(8x-9)^2} \end{aligned}$$

En este caso, aunque no es indispensable, conviene realizar las multiplicaciones indicadas en el numerador, pues así habrá reducción de términos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{48x - 54 - 48x - 56}{(8x - 9)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-110}{(8x - 9)^2}$$

Ejemplo 5: Derivar  $y = \frac{(5x^2 - 7x - 9)^4}{9x - 1}$

Solución: En este caso:

$$\begin{aligned} u &= (5x^2 - 7x - 9)^4 && \text{numerador} \\ v &= 9x - 1 && \text{denominador} \end{aligned}$$

Recordando la fórmula (8) del cociente y sustituyendo después:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{d}{dx} u - u \frac{d}{dx} v}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(9x - 1) \frac{d}{dx} (5x^2 - 7x - 9)^4 - (5x^2 - 7x - 9)^4 \frac{d}{dx} (9x - 1)}{(9x - 1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(9x - 1) \left[ 4(5x^2 - 7x - 9)^3 \frac{d}{dx} (5x^2 - 7x - 9) \right] - (5x^2 - 7x - 9)^4 (9)}{(9x - 1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(9x - 1) \left[ 4(5x^2 - 7x - 9)^3 (20x - 7) \right] - 9(5x^2 - 7x - 9)^4}{(9x - 1)^2}$$

y ordenando conforme a las reglas de escritura para cada término: Primero se escribe el signo; después el coeficiente numérico; a continuación los factores monomios (letras solas) en orden alfabético; luego los factores polinomios y en seguida los radicales:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4(9x-1)(5x^2-7x-9)^3(20x-7) - 9(5x^2-7x-9)^4}{(9x-1)^2}$$

Ejemplo 6: Derivar  $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Solución: Se tiene en este caso:

$$u = x$$

numerador

$$v = \sqrt{x^2+1}$$

denominador

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2+1} \frac{d}{dx} x - x \frac{d}{dx} \sqrt{x^2+1}}{(\sqrt{x^2+1})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2+1} (1) - x \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{(x^2+1)^{3/2}}$$

**EJERCICIO 6.1**

Hallar la derivada de las siguientes funciones:

**PRODUCTOS:**

1)  $y = (6x^2 + 11x - 9)(5x^2 - 13x + 21)$

2)  $y = (x^3 - 7x + 3)(5x^4 - x^2 + 11)$

3)  $y = (7x^5 + 7x^4)(4x^2 - 4x + 17)$

4)  $y = (6x^6 - 2x^3 + 8x)(9x^3 + 7x)$

5)  $y = (6 - 18x - x^2)(x^2 + 19x - 5)$

6)  $y = \left( \frac{3x^7}{8} - \frac{2x^5}{7} \right) \left( \frac{2x^3}{11} + \frac{9x}{19} \right)$

7)  $y = (3x^7 - 6x^2 + 6)\sqrt{4x - 11}$

8)  $y = 4x^2 \sqrt{(x^2 + 2x - 7)^5}$

9)  $y = x^5 \sqrt{4x + 7}$

10)  $y = 3x^2 \sqrt[3]{(2x^3 + 3x^2 - 6x - 9)^7}$

11)  $y = (6x - 5)\sqrt{(5 - 8x)^{11}}$

12)  $y = (1 - x^2)^5 \sqrt[7]{(1 + x^2)^4}$

13)  $y = 5x^7 \sqrt[9]{(5 - 3x^5)^8}$

14)  $y = (4x + 7)^5 (x^2 - 5x + 8)^7$

**COCIENTES:**

15)  $y = \frac{7x + 11}{x^5 - x}$

16)  $y = \frac{5x - 11}{5x + 11}$

17)  $y = \frac{9 - x^2}{5x^3 + x}$

18)  $y = \frac{x}{7x^5 - 6}$

19)  $y = \frac{3x^4 + x - 7}{x}$

20)  $y = \frac{x + 1}{x^2 + 1}$

21) 
$$y = \frac{6x}{(6x-7)^8}$$

23) 
$$y = \frac{(7x^3 - x^2)^5}{11x^3}$$

25) 
$$y = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$$

27) 
$$y = \frac{x^7}{\sqrt[3]{2x+1}}$$

22) 
$$y = \frac{(2x+3)^4}{5x^2}$$

24) 
$$y = \frac{6x^2 + x}{(2x+9)^7}$$

26) 
$$y = \frac{\sqrt{2x}}{x^2 + x}$$

28) 
$$y = \frac{(x^2 - 7x + 9)^4}{(x^2 + 7x - 9)^3}$$

LUIS CASTRO PÉREZ  
www.luiscastrop.comLUIS CASTRO PÉREZ  
www.luiscastrop.comLUIS CASTRO PÉREZ  
www.luiscastrop.com